УДК 532.59

ЙМОВІРНІСНА СТРУКТУРА НЕОДНОРІДНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

Бондаренко Ю.Ю.

Науковий керівник: канд.ф.-м. наук, доцент Макарчук О.П.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Робота присвячена дослідженню аналітичних та ймовірнісних характеристик неоднорідного ланцюга Маркова з неперервним часом з асимптотично стійкими інтенсивностями переходу. Основний акцент здійснювався на ідентифікації та аналізі необхідних та достатніх умов збереження фінальних ймовірностей при дії на інтенсивності «збурень», які прямують до нуля, з асимптотиками степеневого характеру.

Ключові слова: ланцюг Маркова, рівняння Колмогорова, неперервний випадковий процес.

MATRIX STRUCTURE OF INHOMOGENEOUS MARKOV NON-PERFORMANCE LABORATORIES

Bondarenko Yu.Yu.

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropivnitsky, Ukraine

The paper is devoted to the investigation of analytic and probabilistic characteristics of the inhomogeneous Markov chain with continuous time with asymptotically stable transition intensities. The main emphasis was placed on the identification and analysis of the necessary and sufficient conditions for the preservation of final probabilities under the influence of the intensity of "perturbations", which go to zero, with asymptotics of degree power.

Keywords: Markov chain, Kolmogorov equation, continuous random process.

Ланцюги Маркова є математичним об'єктом, який моделює велику кількість випадкових процесів, що широко використовується при створенні формалізованої математичної моделі багатьох фізичних явищ.

У теорії ймовірностей ланцюгом Маркова з неперервним часом називається випадковий процес $\{X(t) : t \geq 0\}$ визначений у неперервному часовому проміжку, що приймає значення у деякій скінченній чи зліченній множині і задовольняє властивість Маркова. Відмінність цього виду ланцюгів

Маркова від дискретних ланцюгів Маркова полягає в тому, що переходи між станами можуть відбуватися в будь-які моменти часу і час наступного переходу теж є випадковою величиною.

Властивість, яка характеризує процес як марківський, прийнято називати марківською або властивістю Маркова. Вперше ця властивість була сформульована російським математиком ***А.А.Марковим***, який в 1907 році поклав початок вивченню послідовностей залежних випробувань і пов'язаних з ними сум випадкових величин. Цей напрямок досліджень відомий зараз під назвою теорії ланцюгів Маркова.

Основи загальної теорії марківських процесів з неперервним часом були закладені у працях ***А.М. Колмогорова.***

Застосування ланцюгів Маркова можна прослідкувати в багатьох областях. Неперервні ланцюги Маркова є потужною математичною моделлю багатьох процесів опису функціонування біологічної системи в умовах виживання та вимирання, конкуренції, системах масового обслуговування.

Неперервний ланцюг Маркова включає в себе доволі широкий спектр випадкових процесів: процеси чистого розмноження або вимирання з незалежними від часу або стану інтенсивностями, процес Пуассона, процес Юла, системи массового обслуговування з різною кількістю каналів та систем відмов.

Однак потрібно відзначити, що багато фізичних моделей функціонують з інтенсивностями, які мають не характер сталої, а лише асимптотично подіні до неї, що викликає інтерес до аналізу ланцюгів з асимптотично стійкими інтенсивностями.

Все вище сказане підкреслює актуальність дослідження ймовірнісних характеристик неперервних неоднорідних ланцюгів Маркова, особливий акцент у відповідній роботі ми робимо саме на аналізі неоднорідного ланцюга Маркова з неперервним часом.

Розглянемо випадок, коли відповідний ланцюг Маркова функціонує під дією інтесивностей, які асимптотично прямують до 1 та 2 відповідно, маємо:

Проблема 1. *Граф однорідного марківського ланцюга з неперервним часом з відповідними інтенсивностями має вигляд,*

$$S_0 \underset{2-\varepsilon_2(t)}{\overset{1-\varepsilon_1(t)}{\rightleftarrows}} S_1$$

де виконуються умови:

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_1(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_2(t);$$

а) скласти та розв'язати відповідну систему рівнянь Колмогорова (в нульовий момент часу система була в стані S_0);

б) знайти фінальні ймовірності.

Розв'язання.

Система рівнянь Колмогорова має вигляд:

$$\begin{cases} p_0'(t) = \big(2-\varepsilon_2(t)\big)p_1(t) - (1-\varepsilon_1(t))p_0(t); \\ p_1{}'(t) = (1-\varepsilon_1(t))p_0(t) - (2-\varepsilon_2(t))p_1(t); \end{cases}$$

На відповідні ймовірності накладено умови:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1;$$

$$p_0(0) = 1.$$

Виразивши $p_1(t)$ через $p_0(t)$:

$$p_0(t) = 1 - p_1(t).$$

Отримаємо:

$$p_1{}'(t) = (1-\varepsilon_1(t))(1-p_1(t)) - (2-\varepsilon_2(t))p_1(t);$$

$$p_1'(t) = (\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)-3)p_1(t) + 1 - \varepsilon_1(t).$$

Розвяжемо останнє рівняння класичним методом Бернуллі:

$$p_1(t) = uv;$$

$$u'v + uv' = (\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)-3)uv + 1 - \varepsilon_1(t)$$

З рівняння :

$$uv' = (\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)-3)uv,$$

знаходимо

$$(\ln|v|)' = \varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)-3;$$

$$v(t) = e^{\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z)-3)dz} = e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}.$$

Підставляючи у відповідне рівняння маємо:

$$u' e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz} = 1 - \varepsilon_1(t);$$

$$u' = \frac{1-\varepsilon_1(t)}{e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}};$$

Звідки:

$$u(x) = \int_0^x \frac{1-\varepsilon_1(t)}{e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}} dt + C$$

Остаточна формула має вигляд:

$$p_1(x) = e^{-3x+\int_0^x (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz} \left(\int_0^x \frac{1-\varepsilon_1(t)}{e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}} dt + C\right)$$

Оскільки $p_1(0) = 0$, то

$$0 = C,$$

адже

$$\int_0^0 f(x)dx = 0.$$

Отже, остаточна формула має вигляд:

$$p_1(x) = e^{-3x+\int_0^x (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz} \int_0^x \frac{1-\varepsilon_1(t)}{e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}} dt$$

Враховуючи, що $p_0(t) = 1 - p_1(t)$ маємо:

$$p_0(x) = 1 - e^{-3x+\int_0^x (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz} \int_0^x \frac{1-\varepsilon_1(t)}{e^{-3t+\int_0^t (\varepsilon_1(z)+\varepsilon_2(z))dz}} dt$$

Незважаючи на готові формули, цілком природним є питання чи умови

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_1(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_2(t);$$

є достатніми для того, щоб $p_0(t), p_1(t)$ описували ймовірність перебування системи в часі.

Будемо аналізувати відповідні випадки по відношенню до асимптотики степеневої функції:

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{\alpha}}, \alpha > 0.$$

Випадок $\boldsymbol{\alpha = 0,5}$.

У цьому випадку ми маємо:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}};$$

$$\int_0^x (\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z))dz = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{z+4}}dz = 2 \cdot \frac{\sqrt{z+4}}{0,5}|_0^x = 4\sqrt{x+4} - 8;$$

$$p_1\,(x) = e^{-3x+4\sqrt{x+4}-8} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{t+4}}}{e^{-3t+4\sqrt{t+4}-8}}dt;$$

$$p_0\,(x) = 1 - e^{-3x+4\sqrt{x+4}-8} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{t+4}}}{e^{-3t+4\sqrt{t+4}-8}}dt;$$

Побудуємо відповідні графіки $p_0\,(t), p_1\,(t)$в середовищі Maple.

Безумовно акцентуватись увага будемо на виконанні ймовірнісних характеристик , а саме :

1)нормуючій властивості ймовірностей;

2) властивості невід'ємності ймовірностей;

Під нормуючою властивістю ми розуміємо прямування до 1 на нескінченності, та під невід'ємністю ми розуміємо те, що $p_0\,(t), p_1\,(t) \geq 0$.

$$> plot\left(\exp(-3\,t + 4\cdot \mathrm{sqrt}(t+4) - 8)\cdot Int\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{sqrt}(x+1)}\right)}{\exp(-3\,x + 4\cdot \mathrm{sqrt}(x+4) - 8)}, \mathrm{x} = 0..\mathrm{t}\right), t = 0..30, color = magenta\right);$$

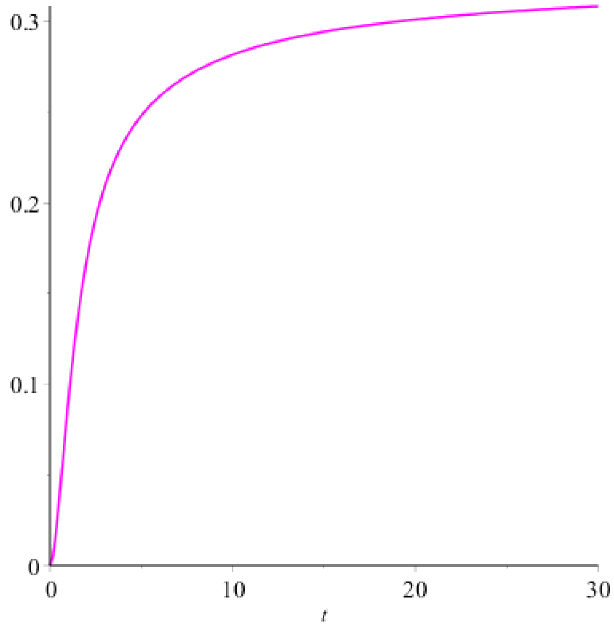

Рис 1. Графік $p_1\ (t)$ *випадок* $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}}$.

Графік для $p_0\ (t)$ має наступний вигляд:

0 10 20 30
t

$$> plot\left(1 - \exp(-3\,t + 4\cdot \mathrm{sqrt}(t+4) - 8)\cdot Int\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{\mathrm{sqrt}(x+1)}\right)}{\exp(-3\,x + 4\cdot \mathrm{sqrt}(x+4) - 8)}, \mathrm{x} = 0..\mathrm{t}\right), t = 0..30, color = magenta\right);$$

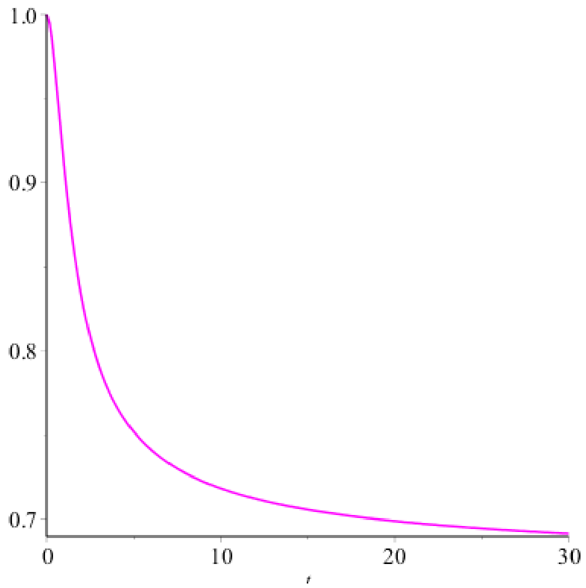

Рис 2. Графік $p_0\ (t)$ *випадок* $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t+4}}$.

Випадок $\boldsymbol{\alpha = 1}$.

У цьому випадку ми маємо:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t+4};$$

$$\int_0^x (\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z))dz = \int_0^x \frac{2}{z+4}dz = 2 \cdot \ln(z+4)|_0^x = 2 \cdot \ln(x+4) - 2 \cdot \ln(4);$$

$$p_1\ (x) = e^{-3x+2\cdot\ln(x+4)-2\cdot\ln(4)} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{t+4}}{e^{-3t+2\cdot\ln(t+4)-2\cdot\ln(4)}} dt;$$

$$p_0\ (x) = 1 - e^{-3x+2\cdot\ln(x+4)-2\cdot\ln(4)} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{t+4}}{e^{-3t+2\cdot\ln(t+4)-2\cdot\ln(4)}} dt;$$

Побудуємо відповідні графіки $p_0\ (t), p_1\ (t)$в середовищі Maple:

$$> plot\left(\exp(-3t + 4\cdot\ln(t+4) - 8)\cdot Int\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{(x+1)}\right)}{\exp(-3x + 4\cdot\ln(x+4) - 8)}, x = 0..t\right), t = 0..30, color = magenta\right);$$

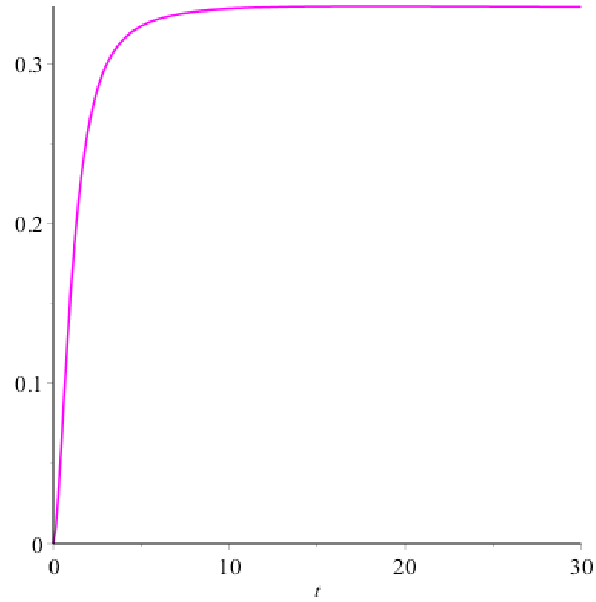

Рис 3. Графік $p_1\ (t)$ випадок $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t+4}$.

Графік для $p_0\ (t)$ має наступний вигляд:

$$> plot\left(\exp(-3\,t + 4\cdot\ln(t+4) - 8)\cdot Int\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{(x+1)}\right)}{\exp(-3\,x + 4\cdot\ln(x+4) - 8)}, x = 0..t\right), t = 0..30, color = magenta\right);$$

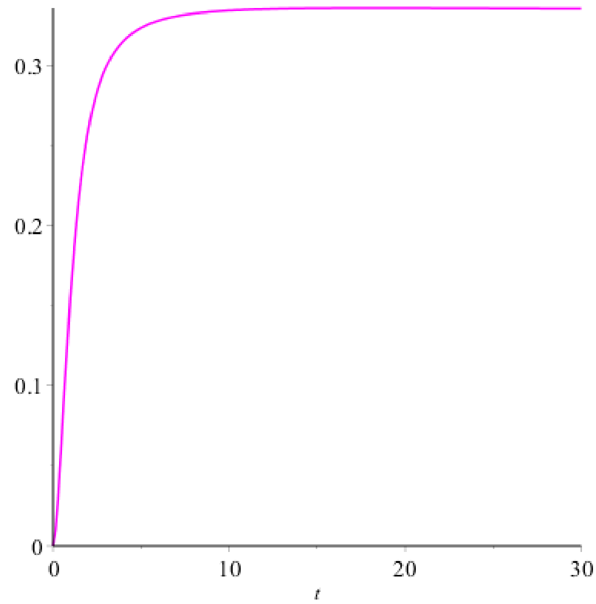

Рис 4. Графік $p_0\ (t)$ *випадок* $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t+4}$.

Випадок $\boldsymbol{\alpha = 2}$.

У цьому випадку ми маємо:

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{(t+4)^2};$$

$$\int_0^x (\varepsilon_1(z) + \varepsilon_2(z))dz = \int_0^x \frac{2}{(z+4)^2}dz = -\frac{2}{z+4}\Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{2}{x+4};$$

$$p_1\ (x) = e^{-3x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x+4}} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{(t+4)^2}}{e^{-3t+\frac{1}{2}-\frac{2}{t+4}}}dt;$$

$$p_0\ (x) = 1 - e^{-3x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x+4}} \int_0^x \frac{1 - \frac{1}{(t+4)^2}}{e^{-3t+\frac{1}{2}-\frac{2}{t+4}}}dt;$$

Побудуємо відповідні графіки $p_0\ (t), p_1\ (t)$в середовищі Maple:

t

$$> plot\left(\exp\left(-3t+\frac{1}{2}-\frac{2}{t+4}\right)\cdot Int\left(\frac{\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\exp\left(-3x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x+4}\right)}, x=0..t\right), t=0..30, color=magenta\right);$$

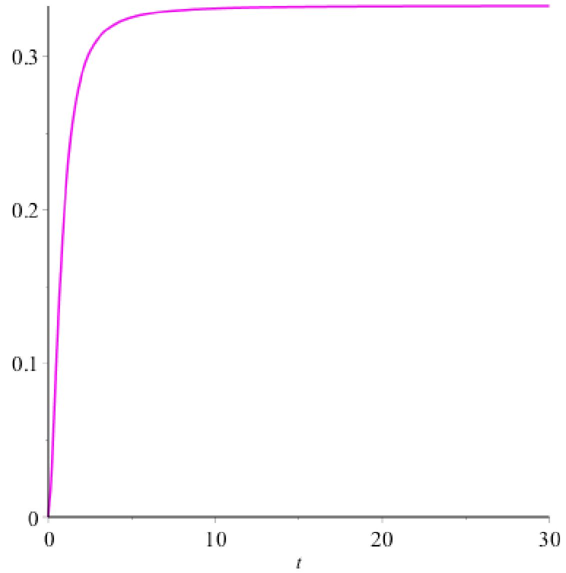

Рис 5. Графік $p_1\ (t)$ *випадок* $\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\frac{1}{(t+4)^2}$.

Графік для $p_0\ (t)$ має наступний вигляд:

$$> plot\left(1-\exp\left(-3t+\frac{1}{2}-\frac{2}{t+4}\right)\cdot Int\left(\frac{\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{\exp\left(-3x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x+4}\right)}, x=0..t\right), t=0..30, color=magenta\right);$$

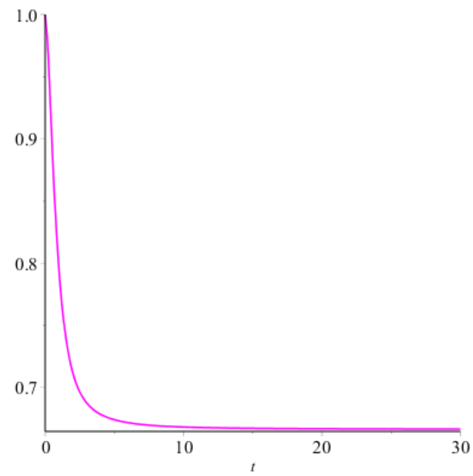

Рис 6. Графік $p_0\ (t)$ *випадок* $\varepsilon_1(t)=\varepsilon_2(t)=\frac{1}{(t+4)^2}$.

Як бачимо у всіх випадках не прослідковується ймовірнісна складова.

Список літератури

1. Авраменко О.В. , Н.Г.Шевченко О.В. Maple 9 та 1230 інтегралів або Символьні обчислення у математичному аналізі. Частина 1. – Кіровоград: 2004. –117 с.

2. Айвазян С. А. Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / С.А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин; Под ред. С. А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
3. Аладьев В. З., Шишаков М.Л. Автоматизированное рабочее место математика.- Лаборатория базовых знаний, 2000..
4. Бернулли Я. О законе больших чисел. – М.:Наука.,1986. – 176 с.
5. Васильев А. Н., Maple 8. Самоучитель.- М.: Диалектика, 2003.
6. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. − 376 с.
7. Валтер Я. Стохастические модели в экономике. − М.: Статистика, 1976. − 232 с.
8. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, −1975. − 320 с.